Obliczenia

Pomiary

Najmniejsza działka skali linijki wykorzystanej do zmierzenia długości L wahadła matematycznego wynosi $1\ \mathrm{mm}$. Przeważnie przyjmuje się, że dokładność jest równa najmniejszej działce skali, jednak skorygowaliśmy tę ocenę w górę i subiektywnie oceniliśmy dokładność ΔL jako równą $1\ \mathrm{cm}$. W naszej ocenie uwzględniliśmy sposób odczytu z podziałki. Dokładne zmierzenie długości wahadła było trudne, ponieważ linijka nie znajdowała się bezpośrednio przy wahadle.

$$\Delta L = 1\ \mathrm{cm}$$

$$u(L) = \frac{\Delta L}{\sqrt{3}}$$

$$u(L) \approx 0.58\ \mathrm{cm}$$

Niepewność pierwiastka długości wahadła obliczyliśmy wykorzystując prawo propagacji niepewności:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i)\right)^2}$$

$$u(\sqrt{L}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial L} u(L)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{L}} u(L)\right)^2}$$

Na przykład w pomiarze pierwszym:

$$u(\sqrt{L}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{0.85\ \mathrm{m}}} \cdot 0.0058\ \mathrm{m}\right)^2} = 0.003131\ \mathrm{m}$$

Wykorzystaliśmy $u(\sqrt{L})$ do narysowania słupków niepewności w *Wykres 2. Zależność okresu drgań wahadła matematycznego od pierwiastka jego długości*.

Średni czas trwania 10 wahnięć policzyliśmy jako średnią arytmetyczną:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$t_{sr} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} t_i$$

Niepewność typu A średniej wartości czasu obliczyliśmy jako odchylenie standardowe wartości średniej pomnożone przez współczynnik Studenta-Fishera:

$$u_a(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \cdot t_{\alpha,N}$$

$$u_a(t_{sr}) = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)}\sum_{i=1}^{5}(t_i - t_{sr})^2} \cdot t_{0.6826,5}$$

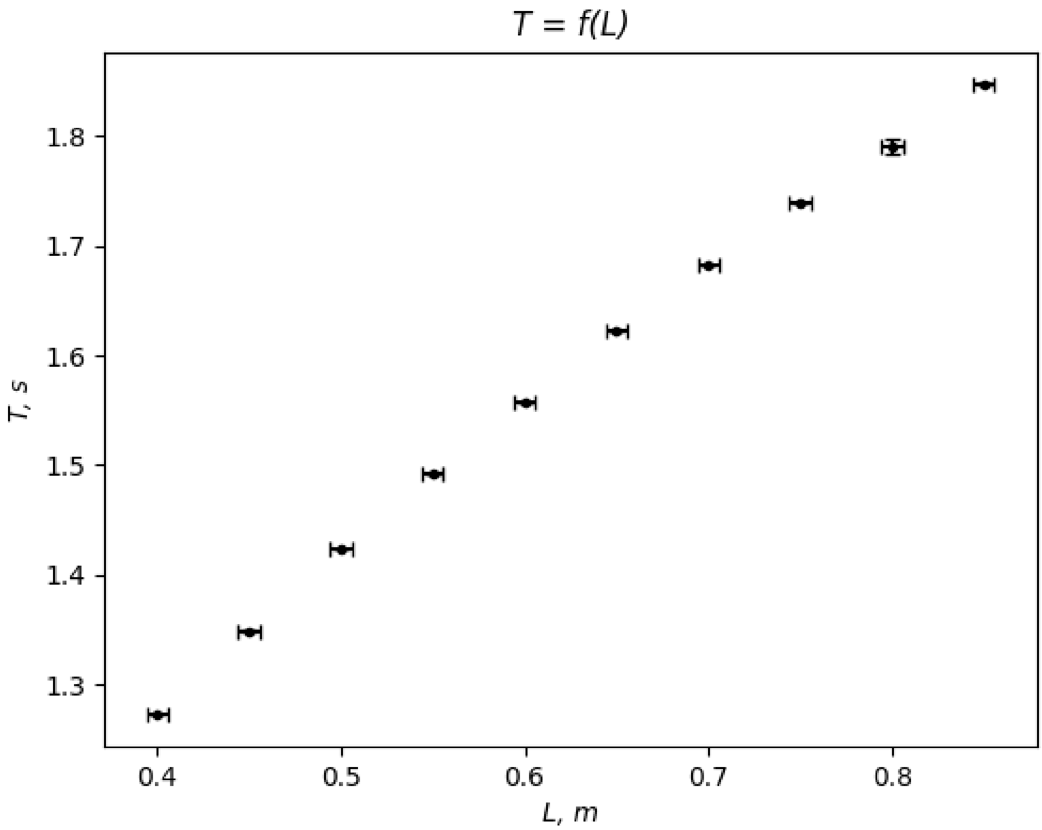
$$t_{0.6826,5} = 1.141$$

Okres drgań policzyliśmy jako średni czas trwania 10 wahnięć podzielony przez 10

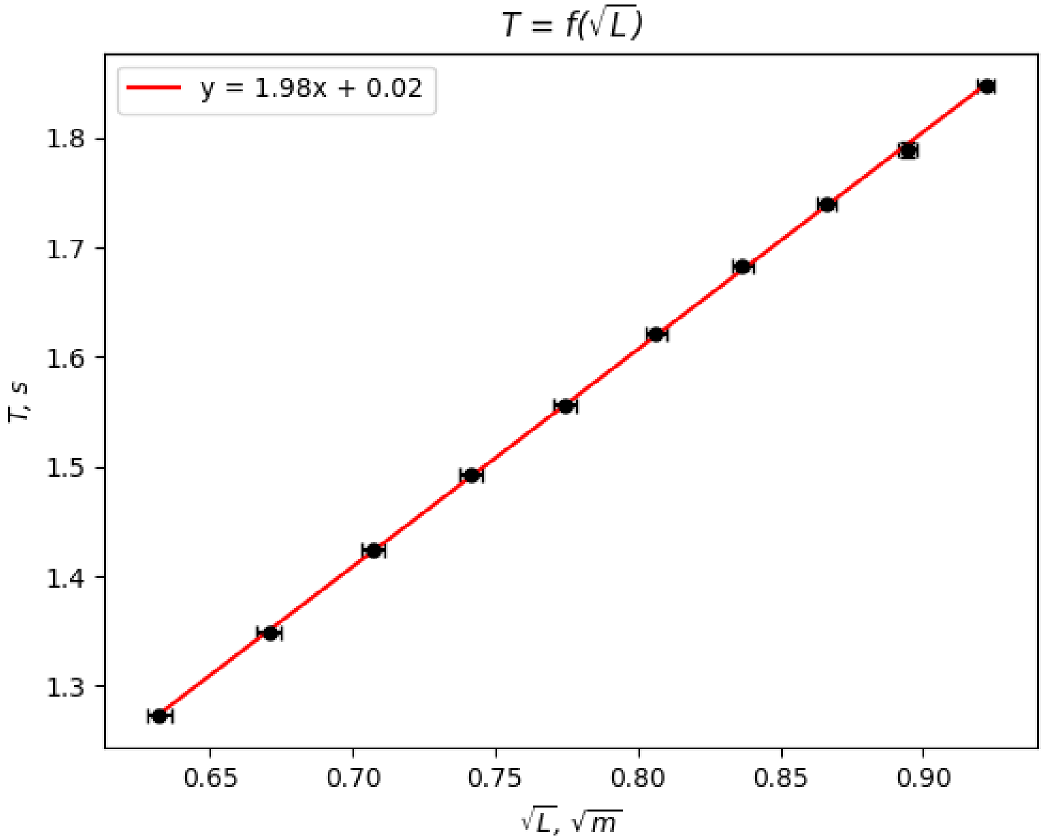
$$T = t_{sr}/10$$

Lp.	L, cm	t, s				
		1	2	3	4	5
1	85	18.47	18.47	18.47	18.48	18.47
2	80	17.96	17.65	17.96	17.96	17.96
3	75	17.39	17.39	17.39	17.39	17.40
4	70	16.83	16.82	16.83	16.82	16.83
5	65	16.22	16.22	16.22	16.22	16.22
6	60	15.57	15.57	15.57	15.57	15.56
7	55	14.92	14.92	14.92	14.92	14.92
8	50	14.23	14.24	14.25	14.24	14.23
9	45	13.49	13.51	13.49	13.48	13.47
10	40	12.73	12.73	12.73	12.73	12.72

Lp.	L, m	$\sqrt{L}, \sqrt{\mathrm{m}}$	t, s	T, s	$u_a(t_{sr})$, s	$u(T)$, s
1	0.85	0.9220	18.47	1.847	0.002	0.000
2	0.80	0.8944	17.90	1.790	0.071	0.007
3	0.75	0.8660	17.39	1.739	0.002	0.000
4	0.70	0.8367	16.83	1.683	0.003	0.000
5	0.65	0.8062	16.22	1.622	0.000	0.000
6	0.60	0.7746	15.57	1.557	0.002	0.000
7	0.55	0.7416	14.92	1.492	0.000	0.000
8	0.50	0.7071	14.24	1.424	0.004	0.000
9	0.45	0.6708	13.49	1.349	0.008	0.001
10	0.40	0.6325	12.73	1.273	0.002	0.000



Wykres 1. Zależność okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości



Wykres 2. Zależność okresu drgań wahadła matematycznego od pierwiastka jego długości

Wyniki regresji liniowej:

$a = 1.9832\ \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}$

$b = 0.0203\ \mathrm{s}$

$u(a) = 0.0085\ \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}$

$u(b) = 0.0067\ \mathrm{s}$

Zapisy skrócone:

$a = 1.9832(85)\ \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}$

$b = 0.0203(67)\ \mathrm{s}$

Prosta nie wychodzi poza słupki niepewności, co oznacza, że zależność $T = f(\sqrt{L})$ jest liniowa i udało się ją wyznaczyć z dużą dokładnością.

Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = a \cdot \sqrt{L}$$

$$a = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}}$$

$$a = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

$$g = 10.04\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Niepewność przyspieszenia ziemskiego z prawa propagacji niepewności

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a} u(a)\right)^2}$$

$$u(g) = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{a^3} u(a)\right)^2}$$

$$u(g) = 0.087\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zapis skrócony:

$$g = 10.040(87)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Test zgodności

Warunek zgodności pomiaru z wartością dokładną

$$|y - y_0| < U(y)$$

Niepewność rozszerzona

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

$$k = 3$$

Zwyczajnie powinno przyjąć się $k = 2$, jednak niepewność wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego z prawa propagacji niepewności zależy tylko od niepewności współczynnika nachylenia wyznaczonego za pomocą regresji liniowej. Ta metoda nie uwzględnia niepewności pomiaru długości wahadła, dlatego zdecydowaliśmy się przyjąć $k = 3$.

$$U(g) = 0.26 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Budynek CNT w Gliwicach, w którym przeprowadzaliśmy doświadczenie, znajduje się na szerokości geograficznej równej 50.29°. Przyspieszenie ziemskie w tym miejscu obliczyliśmy ze wzoru:

$$g' = g_{45} - \frac{1}{2}\left(g_{poles} - g_{equator}\right)\cos\left(2\mathrm{lat}\frac{\pi}{180}\right)$$

$$g' = 9.8084 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Źródło: H., Rebecca. (2016, November 21). *How Gravitational Force Varies at Different Locations on Earth*. Physics Van. University of Illinois at Urbana-Champaign. https://van.physics.illinois.edu/ask/listing/64061

Porównanie naszego wyniku z wartością obliczoną na podstawie szerokości geograficznej

$g = 10.04 \pm 0.26 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$g' = 9.808 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Otrzymany przez nas wynik jest zgodny z wartością przyspieszenia ziemskiego na szerokości geograficznej dla miejsca, gdzie przeprowadzony był eksperyment.

Wnioski

Eksperyment pokazał nam, że wahadło matematyczne jest prostym, ale skutecznym narzędziem do wyznaczania lokalnej wartości przyspieszenia ziemskiego. Przeprowadzone badanie potwierdza teoretyczne modele obliczania przyspieszenia ziemskiego. Otrzymany wynik przyspieszenia ziemskiego jest zgody z wartością odpowiadającą miejscu, w którym przeprowadzono laboratorium, co oznacza, że eksperyment prawdopodobnie został przeprowadzony poprawnie. Byliśmy zaskoczeni, że czas 10 wahnięć w każdym pomiarze, przy jednakowej długości wahadła był bardzo zbliżony. Dla wahadła o długości $L = 65$ cm otrzymaliśmy ten sam wynik (16.22 s) dla każdego z pięciu pomiarów. Nie spodziewaliśmy się, że wynik może być pięć razy ten sam z dokładnością do setnych części sekundy. Nauczyliśmy się, że okres drgań wahadła matematycznego jest bardzo powtarzalny i nie mają na niego istotnego wpływu czynniki zewnętrzne takie jak prądy powietrza (przynajmniej w warunkach sali laboratoryjnej).